

時間反転対称な位相的場の理論における ヒルベルト空間の次元の考察

折井 一歩

カブリ数物連携宇宙研究機構

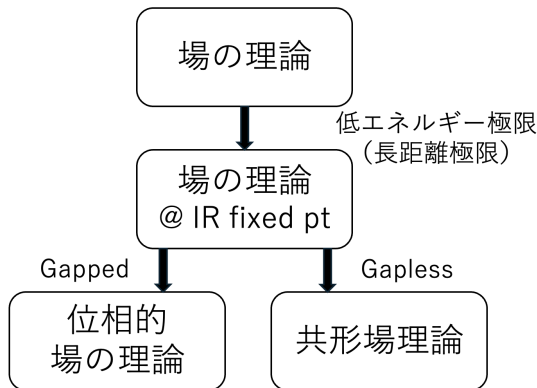
目次

- 位相的場の理論とは
- 位相的場の理論の公理
- 時間反転対称な位相的場の理論
- ヒルベルト空間の次元の考察

位相的場の理論とは

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT)

→ 時空の計量に依存しない QFT



位相的場の理論とは

応用:

- **アノマリー**

$\{d \text{ 次元のアノマリー}\} = \{d + 1 \text{ 次元の SPT 相, i.e. “良い” TQFT}\}$

- **低次元量子重力理論**

$Z = \int \mathcal{D}g e^{iS[g]} \rightarrow \text{計量不変}$ (e.g. $3d$ 重力理論, JT 重力, etc...)

- **トポロジカル物性**

分数量子ホール効果: Chern-Simon 理論

- **数学との関連**

結び目理論, 圏論, etc...

位相的場の理論の公理

Axiom.I: Assign $V(\Sigma)$ to closed surface Σ .

Axiom.II: $V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \rightarrow V(\emptyset) = \mathbb{C}$.

Axiom.III: $Z(M) \in V(\partial M) \rightarrow Z(M) \in \mathbb{C}$ for closed M .

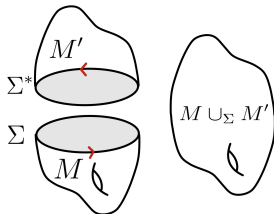
Axiom.IV: $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$.

Gluing:

$$|\psi\rangle := Z(M) \in V(\Sigma)$$

$$\langle\psi'| := Z(M') \in V(\Sigma)^*$$

$$\langle\psi'|\psi\rangle = Z(M \cup_{\Sigma} M') \in V(\emptyset) = \mathbb{C}$$



位相的場の理論の公理

Axiom.I: Assign $V(\Sigma)$ to closed surface Σ .

Axiom.II: $V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \rightarrow V(\emptyset) = \mathbb{C}$.

Axiom.III: $Z(M) \in V(\partial M) \rightarrow Z(M) \in \mathbb{C}$ for closed M .

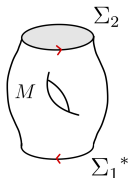
Axiom.IV: $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$.

Cobordism:

$$\partial M = \Sigma_1^* \sqcup \Sigma_2,$$

$$Z(M) \in V(\Sigma_1)^* \otimes V(\Sigma_2), \text{ i.e. } Z(M) : V(\Sigma_1) \rightarrow V(\Sigma_2).$$

$$Z(M) = \sum_{a,b} U_{ab} |\psi_{\Sigma_2,a}\rangle \otimes \langle \psi_{\Sigma_1,b}|.$$



位相的場の理論の公理

Axiom.I: Assign $V(\Sigma)$ to closed surface Σ .

Axiom.II: $V(\Sigma_1 \sqcup \Sigma_2) = V(\Sigma_1) \otimes V(\Sigma_2) \rightarrow V(\emptyset) = \mathbb{C}$.

Axiom.III: $Z(M) \in V(\partial M) \rightarrow Z(M) \in \mathbb{C}$ for closed M .

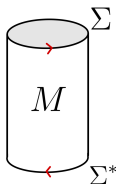
Axiom.IV: $V(\Sigma^*) = V(\Sigma)^*$.

Identity cobordism:

$$M = \Sigma \times I,$$

$$\partial M = \Sigma^* \sqcup \Sigma,$$

$$Z(M) = \sum_a |\psi_{\Sigma,a}\rangle \otimes \langle \psi_{\Sigma,a}| = \text{id}_{V(\Sigma)}.$$



位相的場の理論の公理

Identity cobordism:

$$\begin{aligned}M &= \Sigma \times I, \\ \partial M &= \Sigma^* \sqcup \Sigma, \\ Z(M) &= \sum_a |\psi_{\Sigma,a}\rangle \otimes \langle \psi_{\Sigma,a}| = \text{id}_{V(\Sigma)}.\end{aligned}$$

Dimension formula:

$$\begin{aligned}Z(\Sigma \times S^1) &= \text{Tr}[Z(\Sigma \times I)] \\ &= \text{Tr}\left(\sum_a |\psi_{\Sigma,a}\rangle \langle \psi_{\Sigma,a}|\right) \\ &= \dim V(\Sigma)\end{aligned}$$

時間反転対称な位相的場の理論

時間反転対称性の存在

→ 既存の枠組み + 反ユニタリー $\mathbb{Z}_2$ 変換

- 向き付けの反転における対称性
→ 向き付け不可能な時空の上の理論
- 群作用の結合法則の破れ (2-群への拡張)
→ $Z(\Sigma \times S^1) = \dim V(\Sigma) \notin \mathbb{Z}$
- アノマリーは 4 次元の「良い」TQFT に対応
→ $Z(\mathbb{RP}^4), Z(\mathbb{CP}^2)$ による分類

ヒルベルト空間の次元の考察

$V(T^2)$ の基底の構成

$$|a\rangle := Z(D^2(a) \times S^1) = Z(\text{disc} \times S^1) = Z(\text{torus}) \in V(T^2),$$

$$\rightarrow V(T^2) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{|a\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}.$$

$$S|a\rangle := Z(S^1 \times D^2(a)) \in V(T^2),$$

$$\rightarrow V(T^2) = \text{span}_{\mathbb{C}} \{S|a\rangle \mid a \in \mathcal{A}\}.$$

$$|\mathbb{C}\mathbb{C}\rangle = Z(\text{cylinder} \times S^1)$$

$$= \sum_a M_a |a\rangle$$

$$= \sum_a \eta(a) S|a\rangle,$$

$$\rightarrow M_a = \sum_b S_{ab} \eta(b)$$

$$M_a = \langle a | \mathbb{C}\mathbb{C} \rangle$$

$$= Z(\text{disc} \times S^1) Z(\text{cylinder} \times S^1)$$

$$= Z(\text{cylinder} \times \text{disc} \times S^1)$$

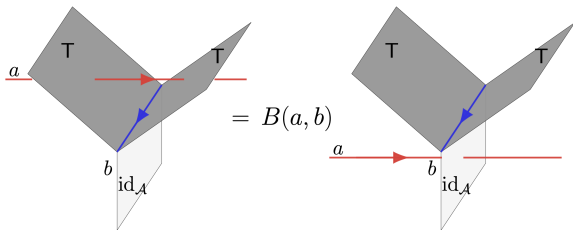
$$= Z(\text{disc} \times S^1)$$

$$= \dim V(\mathbb{R}\mathbb{P}^2(a))$$

ヒルベルト空間の次元の考察

以下 abelian bosonic TQFT を考える。

- $Z(\mathbb{RP}^2(a) \times S^1) \in \mathbb{N} \quad \forall a \in \mathcal{M}, \quad Z(\mathbb{RP}^2(a) \times S^1) = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{M}$
→ $\dim V(\Sigma) \in \mathbb{Z} \quad \forall$ 向き付け不可能曲面 $\Sigma \quad (\because \Sigma = \#_g \mathbb{RP}^2)$
- 右下図 $b \in \mathcal{M}$, ただし $B : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow U(1)$ は Braiding 位相



→ $\mathcal{M} = \{\text{時間反転ドメインウォールに捉えられたエニオン}\}$

- $Z(\mathbb{RP}^4) \cdot Z(\mathbb{CP}^2) = \theta_{\mathcal{M}}$
→ $\mathcal{M}$ がアノマリーの分類に非自明な制限

ご清聴ありがとうございました

参照 [arxiv: 2502. 13532](#), [arxiv: 2508. 04990](#)