

TQFT 入門

Chern–Simons 理論から読み取るモジュラーテンソル圏の気持ち

折井 一歩

カブリ数物連携宇宙研究機構

目標: TQFT の入力データとしてのモジュラーテンソル圏の性質を Chern-Simons 理論を通して理解する.

目標: TQFT の入力データとしてのモジュラーテンソル圏の性質を Chern-Simons 理論を通して理解する.

参考文献

- Topological Quantum, S.H.Simon
- Lectures on the Quantum Hall Effect, D.Tong
- 時間反転対称な位相的場の理論, I.O
- 位相的場の理論ノート, T.Takama

目標: TQFT の入力データとしてのモジュラーテンソル圏の性質を Chern-Simons 理論を通して理解する.

参考文献

- Topological Quantum, S.H.Simon
- Lectures on the Quantum Hall Effect, D.Tong
- 時間反転対称な位相的場の理論, I.O
- 位相的場の理論ノート, T.Takama

目次

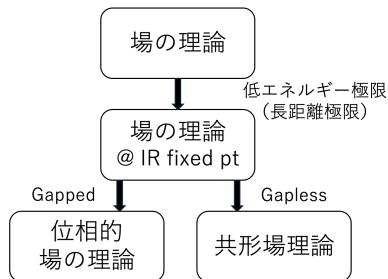
- 位相的場の理論とは
- Chern-Simons 理論の導入
- 正準量子化とエニオン
- モジュラーテンソル圏の気持ち

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは

- 時空の計量に依存しない QFT
- 数学的に定式化できる QFT

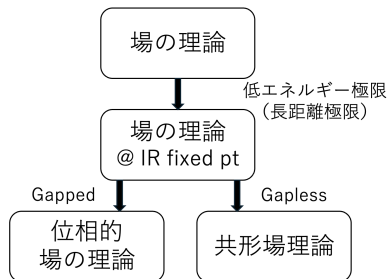
位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは

- 時空の計量に依存しない QFT → IR 固定点上の理論
- 数学的に定式化できる QFT



位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory; TQFT) とは

- 時空の計量に依存しない QFT → IR 固定点上の理論
- 数学的に定式化できる QFT → エニオン (MTC)



応用:

応用:

- トポロジカル物性
→ 分数量子ホール効果の有効理論=Chern-Simons 理論

応用:

- トポロジカル物性
→ 分数量子ホール効果の有効理論=Chern-Simons 理論
- 量子重力理論
→ AdS/CFT の古典的例:Chern-Simons/Wess-Zumino-Witten 対応

応用:

- トポロジカル物性
→ 分数量子ホール効果の有効理論=Chern-Simons 理論
- 量子重力理論
→ Ads/CFT の古典的例:Chern-Simons/Wess-Zumino-Witten 対応
- アノマリー流入
→ d 次元理論のアノマリー= $d + 1$ 次元の SPT 相 (=自明な TQFT)

応用:

- トポロジカル物性
→ 分数量子ホール効果の有効理論=Chern-Simons 理論
- 量子重力理論
→ Ads/CFT の古典的例:Chern-Simons/Wess-Zumino-Witten 対応
- アノマリー流入
→ d 次元理論のアノマリー= $d + 1$ 次元の SPT 相 (=自明な TQFT)
- SymTFT
→ d 次元理論の (一般化) 対称性= $d + 1$ 次元理論の TQFT

$U(1)$ Chern–Simons 理論

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = \frac{k}{4\pi} \int_M A \wedge dA$$

- $M = \bigcup_i U_i$: 三次元多様体
- $A_i \in \Omega^1(U_i)$: $U(1)$ ゲージ場
- $k \in \mathbb{Z}$: レベル

$U(1)$ Chern-Simons 理論

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = \frac{k}{4\pi} \int_M A \wedge dA$$

- $M = \bigcup_i U_i$: 三次元多様体 $\rightarrow$ 時空
- $A_i \in \Omega^1(U_i)$: $U(1)$ ゲージ場 $\rightarrow$ 電子の集団的自由度 e.g. FQHE
- $k \in \mathbb{Z}$: レベル $\rightarrow$ (ホール伝導度) $^{-1}$ e.g. FQHE

$U(1)$ Chern-Simons 理論

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho = \frac{k}{4\pi} \int_M A \wedge dA$$

- $M = \bigcup_i U_i$: 三次元多様体 → 時空
- $A_i \in \Omega^1(U_i)$: $U(1)$ ゲージ場 → 電子の集団的自由度 e.g. FQHE
- $k \in \mathbb{Z}$: レベル → (ホール伝導度) $^{-1}$ e.g. FQHE

→ $\frac{\delta S_{\text{CS}}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$: 作用が計量によらない.

→ $Z[M] := \int \mathcal{D}A \exp(iS_{\text{CS}})$ が多様体 M の位相不変量.

物理量: Wilson loop 演算子

$$W(\gamma, a) = \exp \left(ia \oint_{\gamma} A \right)$$

ただし

- $a \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, k-1\}$
- $\gamma \subset M$: ループ

物理量: Wilson loop 演算子

$$W(\gamma, a) = \exp \left(ia \oint_{\gamma} A \right)$$

ただし

- $a \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ → エニオンのラベル
- $\gamma \subset M$: ループ → エニオンの世界線

物理量: Wilson loop 演算子

$$W(\gamma, a) = \exp \left(ia \oint_{\gamma} A \right)$$

ただし

- $a \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, k-1\} \rightarrow$ **エニオンのラベル**
- $\gamma \subset M$: ループ $\rightarrow$ **エニオンの世界線**

$\rightarrow \langle W(\gamma, a) \rangle$ は結び目不変量として計算される (Gauss linking number).

Remark: ゲージ群 $U(1)$ を $SU(2)$ にすれば Jones 多項式が得られる.

Recall

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.$$

Recall

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.$$

→ ゲージ固定: $A_0 = 0$

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x (A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2).$$

Recall

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.$$

→ ゲージ固定: $A_0 = 0$

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x (A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2).$$

→ 正準量子化

$$[A_1(x), A_2(y)] = \frac{2\pi i}{k} \delta^2(x - y)$$

Recall

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.$$

→ ゲージ固定: $A_0 = 0$

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x (A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2).$$

→ 正準量子化

$$[A_1(x), A_2(y)] = \frac{2\pi i}{k} \delta^2(x - y)$$

→ 積分

$$\left[\oint_{\gamma_1} A, \oint_{\gamma_2} A \right] = \frac{2\pi i}{k}$$

Recall

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho.$$

→ ゲージ固定: $A_0 = 0$

$$S_{\text{CS}} = \frac{k}{4\pi} \int_M d^3x (A_2 \partial_0 A_1 - A_1 \partial_0 A_2).$$

→ 正準量子化

$$[A_1(x), A_2(y)] = \frac{2\pi i}{k} \delta^2(x - y)$$

→ 積分

$$\left[\oint_{\gamma_1} A, \oint_{\gamma_2} A \right] = \frac{2\pi i}{k}$$

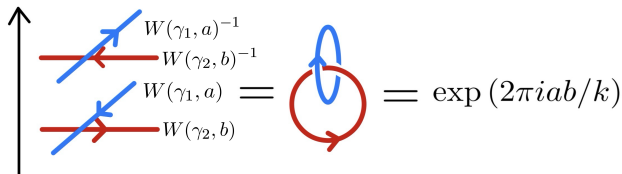
→ BCH 公式を用いると

$$W(\gamma_1, a)W(\gamma_2, b) = \exp(2\pi iab/k) W(\gamma_2, b)W(\gamma_1, a)$$

$$\begin{aligned} W(\gamma_1, a)W(\gamma_2, b) &= \exp(2\pi iab/k) W(\gamma_2, b)W(\gamma_1, a) \\ \Leftrightarrow W(\gamma_1, a)^{-1}W(\gamma_2, b)^{-1}W(\gamma_1, a)W(\gamma_2, b) &= \exp(2\pi iab/k) \end{aligned}$$

$$W(\gamma_1, a)W(\gamma_2, b) = \exp(2\pi iab/k) W(\gamma_2, b)W(\gamma_1, a)$$

$$\Leftrightarrow W(\gamma_1, a)^{-1}W(\gamma_2, b)^{-1}W(\gamma_1, a)W(\gamma_2, b) = \exp(2\pi iab/k)$$



Observation: 交換関係 → エニオンのスピン統計

$$B(a, b) := \exp(2\pi iab/k)$$

$$\theta(a) := \left\{ \exp(2\pi ia^2/k) \right\}^{1/2} = \exp(\pi ia^2/k)$$

Fact: エニオンのデータはモジュラーテンソル圏 (MTC; $\mathcal{C}$) で記述される.

Fact: エニオンのデータはモジュラーテンソル圏 (MTC; $\mathcal{C}$) で記述される.

ここまでの議論から, MTC は少なくとも次のデータを持っている:

- エニオン: $\{a, b, \dots\}$
- トポロジカルスピン: $\theta : \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$
- ブレイディング: $B : \{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$

Fact: エニオンのデータはモジュラーテンソル圏 (MTC; $\mathcal{C}$) で記述される.

ここまでの議論から, MTC は少なくとも次のデータを持っている:

- エニオン: $\{a, b, \dots\}$
- トポロジカルスピン: $\theta : \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$
- ブレイディング: $B : \{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$

→ さらに, こういった構造を持っていると嬉しいだろうか?

Fact: エニオンのデータはモジュラーテンソル圏 (MTC; $\mathcal{C}$) で記述される.

ここまでの議論から, MTC は少なくとも次のデータを持っている:

- エニオン: $\{a, b, \dots\}$
- トポロジカルスピン: $\theta : \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$
- ブレイディング: $B : \{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$

→ さらに, こういった構造を持っていると嬉しいだろうか?

→ 積が欲しい! $\{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow \{a, b, \dots\}$.

Fact: エニオンのデータはモジュラーテンソル圏 (MTC; $\mathcal{C}$) で記述される.

ここまでの議論から, MTC は少なくとも次のデータを持っている:

- エニオン: $\{a, b, \dots\}$
- トポロジカルスピン: $\theta : \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$
- ブレイディング: $B : \{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow U(1)$

→ さらに, こういった構造を持っていると嬉しいだろうか?

→ **積が欲しい!** $\{a, b, \dots\} \times \{a, b, \dots\} \rightarrow \{a, b, \dots\}$.

フュージョン則

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$$

Recall: $U(1)$ Chern–Simons 理論はレベル $k \in \mathbb{Z}$ を入力として次のデータを持つ:

- エニオン: $a \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, k-1\}$
- トポロジカルスピン: $\theta(a) = \exp(\pi i a^2/k)$
- ブレイディング: $B(a, b) = \exp(2\pi i ab/k)$

→ ここに積 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を入れるとしたら?

Recall: $U(1)$ Chern-Simons 理論はレベル $k \in \mathbb{Z}$ を入力として次のデータを持つ:

- エニオン: $a \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, k-1\}$
- トポロジカルスピン: $\theta(a) = \exp(\pi i a^2/k)$
- ブレイディング: $B(a, b) = \exp(2\pi i ab/k)$

→ ここに積 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ を入れるとしたら?

→ $a, b \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ に対して $a \times b := a + b \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ が適切であろう.

Remark: 一般に二つのエニオンのフュージョンは、いくつかのセクターに分かれる; $a \times b = \sum_c N_{ab}^c c$. $U(1)$ Chern-Simons 理論は $a \times b = c$ のようにフュージョンによるセクターが一意に決まるクラスの TQFT であり, そうしたクラスの TQFT を **abelian TQFT** と呼ぶ.

→ どういった構造を持てば一般のフュージョンを記述できるだろうか?

Recall: スピンの合成 i.e. $\mathfrak{su}(2)$ の表現のテンソル積の直和分解:

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}.$$

ここで既約表現 $\mathbf{2}$ (二次元表現) を一つの粒子 (セクター) だと思って, その合成の結果を既約表現 $\mathbf{1}, \mathbf{3}$ に分解している ($\sim$ フュージョン則).

Recall: スピンの合成 i.e. $\mathfrak{su}(2)$ の表現のテンソル積の直和分解:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3.$$

ここで既約表現 2 (二次元表現) を一つの粒子 (セクター) だと思って, その合成の結果を既約表現 $1, 3$ に分解している ($\sim$ フュージョン則).

→ **テンソル積, 直和** のような構造が必要だろう.

Recall: スピンの合成 i.e. $\mathfrak{su}(2)$ の表現のテンソル積の直和分解:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3.$$

ここで既約表現 2 (二次元表現) を一つの粒子 (セクター) だと思って, その合成の結果を既約表現 $1, 3$ に分解している ($\sim$ フュージョン則).

→ **テンソル積, 直和**のような構造が必要だろう.

→ さらに "**既約**" に**必ず分解できる**という構造も欲しい.

Recall: スピンの合成 i.e. $\mathfrak{su}(2)$ の表現のテンソル積の直和分解:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3.$$

ここで既約表現 2 (二次元表現) を一つの粒子 (セクター) だと思って, その合成の結果を既約表現 $1, 3$ に分解している ($\sim$ フュージョン則).

→ テンソル積, 直和のような構造が必要だろう.

→ さらに “既約” に必ず分解できるという構造も欲しい.

Remark: $\mathfrak{su}(2)$ は半単純性から表現の既約分解が可能である.

Recall: スピンの合成 i.e. $\mathfrak{su}(2)$ の表現のテンソル積の直和分解:

$$2 \otimes 2 = 1 \oplus 3.$$

ここで既約表現 2 (二次元表現) を一つの粒子 (セクター) だと思って, その合成の結果を既約表現 $1, 3$ に分解している ($\sim$ フュージョン則).

→ テンソル積, 直和のような構造が必要だろう.

→ さらに “既約” に必ず分解できるという構造も欲しい.

Remark: $\mathfrak{su}(2)$ は半単純性から表現の既約分解が可能である.

→ MTC はさらに次のデータを持っているだろう:

- テンソル積 (=先ほど導入した積の一般化)
- 直和
- 半単純性

Fact: MTC $\mathcal{C}$ は代表的構造/データとして以下を持つ:

- エニオン: 単純対象全体の集合 $\text{Simp}(\mathcal{C})$
- トポロジカルスピン: $\theta : \text{Simp}(\mathcal{C}) \rightarrow U(1)$ (リボン構造)
- ブレイディング: $B : \text{Simp}(\mathcal{C}) \times \text{Simp}(\mathcal{C}) \rightarrow U(1)$ (組紐構造)
- テンソル積: $a \otimes b$
- 直和: $\bigoplus_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{ab}^c c$
- 半単純性: $a \otimes b = \bigoplus_{c \in \text{Simp}(\mathcal{C})} N_{ab}^c c$

Remark: MTC からトポロジカルスピン, ブレイディングの情報を忘れたデータ (圏) がフュージョン圏である.

→ 非可逆対称性を記述する言語.

- TQFT は時空のトポロジーのみによる QFT でエニオン (モジュラーテンソル圏; MTC) により指定される.
- TQFT の代表例に Chern–Simons 理論があり, 物理量は Wilson loop 演算子であり, エニオンでラベルされる.
- Chern–Simons 理論の正準量子化を通してエニオンのトポロジカルスピン, ブレイディングの情報が取り出せる.
- エニオンの積としてフュージョン則を導入し, そのためにはテンソル積, 直和, 半単純なる構造が必要である.
- モジュラーテンソル圏は, リボン構造, 組紐構造, テンソル積, 直和, 半単純性を持つデータ (圏) である.

ありがとうございました.